Ebene Algebraische Kurven 13. Juni 2016

Es sei im Folgenden $\mathcal{Q}$ eine Quadrik ($Grad = 4$). Wir wählen $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 + \mathcal{O}_3 \in \operatorname{Div}^3(\mathcal{Q})$. Tripel von Punkten können „addiert“ werden. Es seien die Divisoren

$$D = P_1 + P_2 + P_3 \in \operatorname{Div}^3(\mathcal{Q})$$

und

$$D' = Q_1 + Q_2 + Q_3 \in \operatorname{Div}^3(\mathcal{Q}).$$

Wir wählen ein Kubik $\mathcal{C}$ durch D und D'

$$D + D' + R = \mathcal{Q} \cdot \mathcal{C}$$

und Kubik $\mathcal{C}'$ durch R und $\mathcal{O}$.

$$D'' + \mathcal{O} + R = \mathcal{Q} \cdot \mathcal{C}'$$

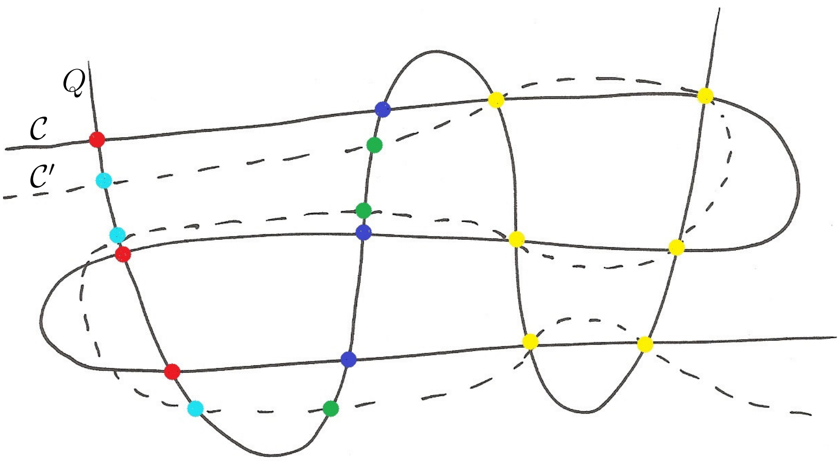
Die Kubiken schneiden die Quadrik jeweils in 12 Punkten. Es ist also

$$D + D' + R \equiv D'' + \mathcal{O} + R$$

und umgeformt ergibt sich

$$(D - \mathcal{O}) + (D' - \mathcal{O}) \equiv (D'' - \mathcal{O})$$

Das Analogon dazu ist „$D'' = D \oplus D'$“. Wir erhalten dazu die folgende Abbildung.



●: D ●: D' ●: R ●: $\mathcal{O}$ ●: D''

Wir halten ohne Beweis fest, dass

$$1) \quad \varphi : \operatorname{Div}^3(\mathcal{Q}) \twoheadrightarrow \operatorname{Cl}(\mathcal{Q})$$
$$D \mapsto D - \mathcal{O}$$

surjektiv ist, aber nicht bijektiv. Beweisen lässt sich dies mit dem Satz von Bezout. Außerdem gilt

$$2) \quad \mathrm{Cl}(\mathcal{Q}) \cong \mathbb{C}^3 / \Lambda,$$

wobei Λ ein Gitter mit $\Lambda \cong \mathbb{Z}^6$ darstellt, was topologisch dem 3 dimensionalen Torus entspricht.

(4.15) Körper der rationalen Funktion einer Kurve

Wir betrachten im Folgenden rationale Funktionen der Form $\frac{g(x)}{f(x)}$, mit $g, h \in \mathbb{C}[X]$. Dabei bezeichnet $\mathbb{C}(X)$ den Körper der rationalen Funktionen in x. Ist die Kurve $\mathcal{V}(f) = C \subset \mathbb{A}^2$ irreduzibel, so bezeichnet

$$\mathbb{C}[C] = \mathbb{C}[X,Y] \big/ (f)$$

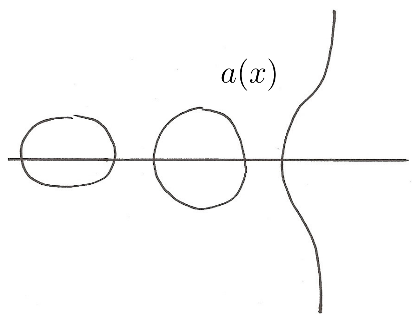
den affinen Koordinatenring von C. Dies ist ein nullteilerfreier Ring, da C irreduzibel ist.

Wir bilden nun den dazu gehörigen Quotientenkörper und nennen diesen $\mathbb{C}(C)$.

$$\mathbb{C}(C) := Q\left(\mathbb{C}[C]\right) = \left\{ \frac{g}{h} \mid g, h \in \mathbb{C}[C], h \not\equiv 0 \right\}.$$

Es besitzt jede Kurve so einen Körper.

Beispiel Wir betrachten die Kurve $C = \mathcal{V}(f)$ mit $f = y^2 - a(x)$, wobei $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ ist. Dieses $a(x)$ könnte, wie wir in der folgenden Abbildung sehen, zum Beispiel von Grad 5 sein.



Der affine Koordinatenring ist dann

$$\mathbb{C}[C] = \mathbb{C}[X,Y] \big/ (f) \cong \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[X]y,$$

mit $y^2 = a$. Der Quotientenkörper entspricht dann

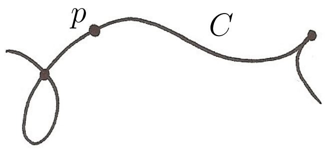
$$\begin{aligned} \mathbb{C}(C) =& Q\left(\mathbb{C}[C]\right) \\ \cong& \mathbb{C}(X) \oplus \mathbb{C}(X)y \\ \cong& \mathbb{C}(X)[Y] \big/ (y^2 - a). \end{aligned}$$

Es ist also $\mathbb{C}(X) \subset \mathbb{C}(C)$ eine Körpererweiterung von Grad 2.

Allgemeiner ist $\mathbb{C}(X) \subset \mathbb{C}(C)$ eine Körpererweiterung von Grad m, wenn $C = \mathcal{V}(f)$ mit

$$f = a_0(x)y^m + a_1(x)y^{m-1} + ... + a_m(x).$$

Es sei nun $p \in C$ und $p \notin \mathrm{Sing}(C)$



Die Kurve C sei durch

$$x(t) = t \text{ und } y(t) = t^k + ...$$

parametrisiert. Wir wählen $\varphi = \frac{g}{h} \in \mathbb{C}(C)$ und definieren

$$\begin{aligned}\mathrm{Ord}_p\varphi :=& \mathrm{Ord}_t \frac{g(x(t), y(t))}{h(x(t), y(t))}\\ =& \mathrm{Ord}_t g(x(t), y(t)) - \mathrm{Ord}_t h(x(t), y(t))\\ =& \mathrm{I}(C, D; p) - \mathrm{I}(C, D'; p),\end{aligned}$$

wobei $D = \mathcal{V}(g)$ und $D' = \mathcal{V}(h)$.

Jetzt betrachten wir mit $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ eine projektive Kurve. Dazu sei $\mathcal{C} = \mathcal{V}(F)$. Wir definieren den homogenen Koordinatenring durch

$$\mathbb{C}[\mathcal{C}] := \mathbb{C}[X, Y, Z] \Big/ (F).$$

Definieren wir

$$\mathbb{C}[\mathcal{C}]_e := \mathbb{C}[X, Y, Z]_e \Big/ F\mathbb{C}[X, Y, Z]_{e-3},$$

so können wir schreiben

$$\mathbb{C}[\mathcal{C}] = \bigoplus_{e=0}^{\infty} \mathbb{C}[\mathcal{C}]_e.$$

$\mathbb{C}[\mathcal{C}]$ ist also ein graduierter Ring. Nehmen wir ein $G \in \mathbb{C}[X, Y, Z]_e$, so ist

$$G(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^e G(x, y, z).$$

Das bedeutet die Elemente von $\mathbb{C}[\mathcal{C}]$ können nicht als Funktionen auf $\mathcal{C}$ aufgefasst werden.

Definition Wir bezeichnen mit

$$\mathbb{C}(\mathcal{C}) := Q\left(\mathbb{C}[\mathcal{C}]\right)_0 = \left\{ \frac{G}{H} \mid G, H \in \mathbb{C}[\mathcal{C}],\ Grad(G) = Grad(H) \right\}$$

den Körper der rationalen Funktionen auf $\mathcal{C}$.

Mit der Erweiterung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2 & \hookrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ \cup & & \cup \\ C & \hookrightarrow & \mathcal{C} \end{array}$$

erhalten wir einen Isomorhismus von

$$\mathbb{C}(C) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}(\mathcal{C})$$

durch die beiden Abbildungen

$$\frac{G^D}{H^D} \leftarrow\!\shortmid \frac{G}{H}$$

und

$$\frac{g}{h} \mapsto \frac{g^H z^{Grad(h)-Grad(g)}}{h^H}.$$

Sei $\varphi \in \mathbb{C}(\mathcal{C})$, dann ist der Divisor von φ definiert durch

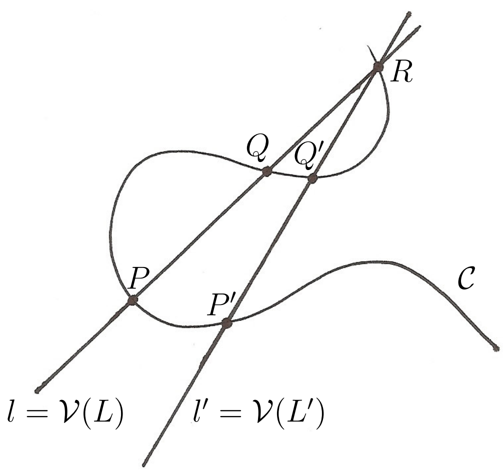
$$(\varphi) := \sum_{p\in\mathcal{C}} \operatorname{Ord}_p(\varphi)\, P$$

Wir schreiben $\varphi = \frac{G}{H}$, so wie in der Definition von $\mathbb{C}(\mathcal{C})$ und setzen $\mathcal{D} = \mathcal{V}(G)$ und $\mathcal{D}' = \mathcal{V}(H)$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}(\varphi) &= \sum_{p\in\mathcal{C}} \operatorname{Ord}_p\left(\frac{G}{H}\right) P \\ &= \sum_p \mathrm{I}(\mathcal{C},\mathcal{D};p)P - \sum_p \mathrm{I}(\mathcal{C},\mathcal{D}';p)P \\ &= \mathcal{C}\cdot\mathcal{D} - \mathcal{C}\cdot\mathcal{D}'.\end{aligned}$$

Insbesondere sehen wir: $D \equiv D' \Leftrightarrow D - D' = (\varphi)$, wobei $\varphi \in \mathbb{C}(\mathcal{C})$.

Beispiel Wir betrachten die folgende Abbildung, dann ist $P + Q \equiv P' + Q'$ und damit $P + Q - (P' + Q') = \left(\frac{L}{L'}\right)$ mit $\frac{L}{L'} \in \mathbb{C}(\mathcal{C})$.



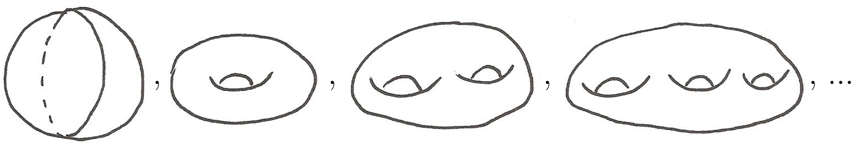
(4.16) Geschlecht einer glatten Kurve

Wir wollen einer glatten Kurve $\mathcal{C}$ eine ganze Zahl $g(\mathcal{C})$ zuordnen.

$$\mathcal{C} \mapsto g(\mathcal{C}) \in \{0, 1, 2, ...\}\,.$$

Topologischer Zugang

1) Wir klassifizieren die kompakten, orientierbaren 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten.



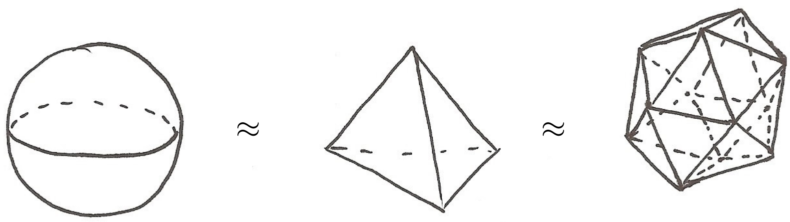
$g = 0$ $g = 1$ $g = 2$ $g = 3$

Bis auf Homöomorphie ist dies durch eine einzige Zahl g festgelegt.

2) Wir können g über die Euler-Charakteristik χ bestimmen.

$$\chi = E - K + F = 2 - 2g.$$

Dabei bezeichnen E, K, F die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächenstücke der Triangulierung einer Fläche. Wir betrachten zunächst die 2-Sphäre. Dann stellen ein Tetraeder beziehungsweise ein Ikosaeder Triangluierungen der 2-Sphäre dar.



2-Sphäre Tetraeder Ikosaeder

Für das Tetraeder ergibt sich

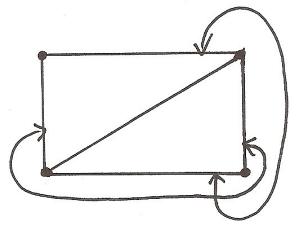
$$\chi = E - K + F = 4 - 6 + 4 = 2$$

und für das Ikosaeder erhalten wir, da χ eine topologische Invariante ist auch

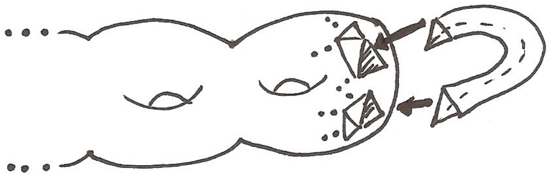
$$\chi = E - K + F = 12 - 30 + 20 = 2.$$

Mit $\chi = 2 - 2g$ folgt $g = 0$.

Nun betrachten wir den 1-dimensionalen Tours mit der folgenden Triangluierung.



Es ist $E - K + F = 1 - 3 + 2 = 0$, womit wir $g = 1$ erhalten. Um nun induktiv den Zusammenhang $\chi = 2 - 2g$ herzuleiten, kleben wir an die Triangulierung einer Fläche einen Henkel an.



Dabei steht E, K, F für die Triangluierung ohne Henkel und E', K', F' für die Triangulierung mit angeklebten Henkel. So erhalten wir

$$E' = E, \; K' = K + 3 \text{ und } F' = F - 2 + 3.$$

Für die Euler-Charakteristik ergibt sich somit

$$\chi' = E' - K' + F' = E - K + F - 2 = \chi - 2.$$

Mit der Klassifikation der Flächen aus 1) impliziert das $\chi = 2 - 2g$.

3) Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ eine glatte algebraische Kurve. Da $\mathcal{C}$ zwei reelle Gleichungen besitzt und $\mathbb{P}^2$ eine reelle 4-Mannigfaltigkeit ist, ist $\mathcal{C}$ eine Untermannigfaltigkeit der reellen Dimension 2. Man kann zeigen:

- $\mathcal{C}$ ist zusammenhängend.
- $\mathcal{C}$ ist orientierbar.

Also ist $\mathcal{C}$ homöomorph zu einer der Flächen